

**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ**

**KOM 511 - Uyarlamalı Kontrol Sistemleri**

**2024-2025 BAHAR**

**ÖDEV – 3**

**KOORDİNATÖR:**

**Prof. Dr. Yaprak Yalçın**

**TAKIM 9:**

**Mustafa Arık – 504241117**

**Oğuz Ziya Onat – 504241144**

**Yunus Ahmet Akdal – 504241128**

**Soru a)**

**Teorik Hesaplamalar:**

Denklem a.1’de sistem modeli verilmiştir.

|  |  |
| --- | --- |
|  | **(a.1)** |
|  |  |

{e(t)}, N(0, 0.5) özelliğinde bağımsız bir normal rastlantısal değişken olarak kabul edilmiştir.

1. **Standart (Unutma Faktörsüz) RLS:**

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  | **(a.i.1)** |
|  |  |
|  |  |

Sistem modeline göre, regresyon modeli ve regresyon ile parametre vektörleri denklem a.i.1’de gösterildiği gibi olmalıdır.

|  |  |
| --- | --- |
|  | **(a.i.2)** |
|  |  |

Hata ve tahmini yanıt denklem a.i.2’te gösterilmiştir. Denklem a.i.3’te kazanç vektörünün parametrik olarak gösterimi verilmiştir.

|  |  |
| --- | --- |
|  | **(a.i.3)** |
|  |  |
|  | **(a.i.4)** |
|  |  |
|  | **(a.i.5)** |
|  |  |

Parametre ve kovaryans güncellemeleri denklem a.i.4 ve a.i.5’da verilmiştir.

Simülasyon için nümerik hesaplamalar aşağıdaki gibidir.

|  |  |
| --- | --- |
|  | **(a.i.6)** |
|  |  |

y, u ve değerleri için varsayımsal olarak sırasıyla 0, 1 ve 100 değerleri seçilmiştir. Geri kalan RLS hesaplamaları bu varsayımlara dayanarak yapılacaktır.

|  |  |
| --- | --- |
|  | **(a.i.7)** |
|  |  |

Gerçek çıkış değeri;

|  |  |
| --- | --- |
|  | **(a.i.8)** |
|  |  |

Gerçek sistemdeki gürültü, e(t), değerinin N(0, 0.5) aralığı içinde olması gerekmektedir. Simülasyon için e(1) değeri 0.2 seçilmiştir.

|  |  |
| --- | --- |
|  | **(a.i.9)** |
|  |  |
|  | **(a.i.10)** |
|  |  |

Bu verilere göre RLS algoritması için gereken tahmini hata aşağıdaki gibi elde edilir.

|  |  |
| --- | --- |
|  | **(a.i.11)** |
|  |  |

Elde edilen sonuçlara göre kazanç ve parametre güncellemesi denklem a.i.12 ve a.i.13’te elde edildiği gibidir.

|  |  |
| --- | --- |
|  | **(a.i.12)** |
|  |  |
|  | **(a.i.13)** |
|  |  |
|  | **(a.i.14)** |
|  |  |

Bulunan parametre güncellemesine göre sıradaki a ve b değerleri, a(1) = 0, b(1) = 0.69 şeklinde olmalıdır.

1. **Unutma Katsayılı RLS:**

Unutma katsayısı, λ, 0 ve 1 arasında bir sayı olmalıdır. Unutma katsayısız RLS’ten farklı olarak, kazanç vektörü ve kovaryans matrisinin güncellemesinde unutma katsayısı olan λ kullanılmaktadır. En iyi sonuç 0.99 unutma katsayısı ile alındığından, λ 0.99 seçilerek hesaplamalar ve simülasyonlar yapılmıştır.

|  |  |
| --- | --- |
|  | **(a.ii.1)** |
|  |  |

|  |  |
| --- | --- |
|  | **(a.ii.2)** |
|  |  |

Buna göre simülasyon için nümerik olarak sonuçlar aşağıdaki gibidir.

|  |  |
| --- | --- |
|  | **(a.ii.3)** |
|  |  |
|  | **(a.ii.5)** |
|  |  |
|  | **(a.ii.6)** |
|  |  |

Bulunan parametre güncellemesine göre sıradaki a ve b değerleri, standart RLS’teki hesaplamalarda olduğu gibi, *a*(1) = 0, *b*(1) = 0.69 şeklinde olmalıdır. Ancak ileriki zamanlarda kovaryans ve kazanç vektörü hesapları değişim gösterdiğinden, a ve b parametrelerinin değişiminde farklılıklar görülecektir.

Kovaryans vektöründeki değişime bakarsak P00 ve P11 değerleri daha yüksek bulunmuştur. Unutma faktörü 1’den düşük bir değer olduğundan kovaryans matrisinin gittikçe büyümesi beklenmektedir.

1. **ELS**

Genişletilmiş regresyon yapısı için parametrik denklemler aşağıda verilmiştir.

|  |  |
| --- | --- |
|  | **(a.iii.1)** |
|  |  |
|  | **(a.iii.2)** |
|  |  |
|  | **(a.iii.3)** |
|  |  |
|  | **(a.iii.4)** |
|  |  |
|  | **(a.iii.5)** |
|  |  |

Yukarıda verilen denklemlerden de rahatlıkla görülebildiği üzere, ELS denklemleri genel yapı itibariyle standart RLS denklemleri ile oldukça benzerlik göstermektedir. ELS yapısında, RLS yapısına ek olarak çıkış gürültüsünün korelasyonu da dahil edilir.

Nümerik olarak incelerken, RLS’teki seçimlere ek olarak korelasyonun anlamlı bir başlangıç değeri vermesi sebebiyle, *c* parametresi -0.5, *e*(0)’da 0.1 seçilecektir. a ve b parametreleri ile kontrol girişi ve çıkışın başlangıç değerleri RLS uygulamasındaki seçimler ile aynı kabul edilmiştir.

|  |  |
| --- | --- |
|  | **(a.iii.6)** |
|  |  |
|  | **(a.iii.7)** |
|  |  |
|  | **(a.iii.8)** |
|  |  |
|  | **(a.iii.9)** |
|  |  |
|  | **(a.iii.10)** |
|  |  |
|  | **(a.iii.11)** |
|  |  |

1. **LMS**

LMS yönteminin RLS ve ELS yöntemlerinden farkı, hatanın minimize edilerek kontrol parametre kestirimi yapılmaya çalışılmasıdır. Dolayısıyla yakınsama hızı düşer.

|  |  |
| --- | --- |
|  | **(a.iv.1)** |
|  |  |
|  | **(a.iv.2)** |
|  |  |
|  | **(a.iv.3)** |
|  |  |

Burada öğrenme adımının oranıdır. Çok büyük bir değer seçilmesi durumunda sistem kararsız olacağından 0’a yakın bir değer seçilmelidir. Simülasyon için bu değer 0.03 seçilmiştir.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  | **(a.iv.4)** |
|  |  |
|  |  |
|  | **(a.iv.5)** |
|  |  |
|  | **(a.iv.6)** |
|  |  |

Elde edilen sonuçlara göre parametre güncellemesi t=1 için denklem a.iv.7’de gösterildiği gibi elde edilir.

|  |  |
| --- | --- |
|  | **(a.iv.7)** |
|  |  |

Görüldüğü üzere, parametre güncellemesi değerleri sıfıra RLS tabanlı yöntemlerde elde edilen değerlerden oldukça düşüktür, ancak yakınsama yavaş olsa da kararlı ve minimum hata değeri ile olacağından gerçek sistemler üzerinde uygulaması daha kolay olacaktır.

1. **Projection Algorithm (PA)**

|  |  |
| --- | --- |
|  | **(a.v.1)** |
|  |  |
|  | **(a.v.2)** |
|  |  |

değeri adım büyüklüğünü, *a* değeri de regülasyon sabitini ifade eder. *a* her zaman pozitif yarı tanımlı bir değer olmalıdır, değeri de 0 ve 2 arasında bir değer seçilmelidir. Simülasyon örneği için ve seçilmiştir.

|  |  |
| --- | --- |
|  | **(a.v.3)** |
|  |  |
|  | **(a.v.4)** |
|  |  |
|  | **(a.v.5)** |
|  |  |
|  | **(a.v.6)** |
|  |  |
|  | **(a.v.7)** |
|  |  |
|  | **(a.v.8)** |
|  |  |

1. **Stochastic Approximation (SA)**

|  |  |
| --- | --- |
|  | **(a.vi.1)** |
|  |  |

Kovaryans güncellemesinin stoachastic yaklaşımdaki gösterimi denklem a.vi.1’de gösterilmiştir. değeri simülasyon için 0.2 seçilmiştir.

|  |  |
| --- | --- |
|  | **(a.vi.2)** |
|  |  |

İlk adım için kovaryans güncellemesinin paydası 1 gelmektedir.

|  |  |
| --- | --- |
|  | **(a.vi.3)** |
|  |  |
|  | **(a.vi.4)** |
|  |  |
|  | **(a.vi.5)** |
|  |  |

İlk adımda elde edilen sonuçlar ve . Yalnızca *b* parametresi güncellendi, çünkü kabulü yapılmıştı, dolayısıyla değeri 0 geldi. İlerleyen adımlarda olacağından, *a* parametresi de güncellenecektir. Dolayısıyla değeri de büyüyeceğinden, kovaryans güncellemesi gittikçe küçülecektir. Bu da yakınsama hızının gittikçe azalmasına yol açacaktır. Haliyle *a* ve *b* parametrelerinin yakınsaması, istenen değere çok uzun sürelerde ulaşacaktır, ancak yakınsama garanti altına alınacak ve gürültüye karşı yüksek bir dayanıklılık gösterecektir.

1. **Seçiminin Etkisi**

sadece RLS ve ELS algoritmaları için önemli bir değerdir.

parametresinin yüksek bir değer seçilmesi, bilinmeyen parametreler olduğu ve bunlara yüksek hızda tepki verileceği anlamına gelir. Bu sebeple yüksek salınımlar görülebilir.

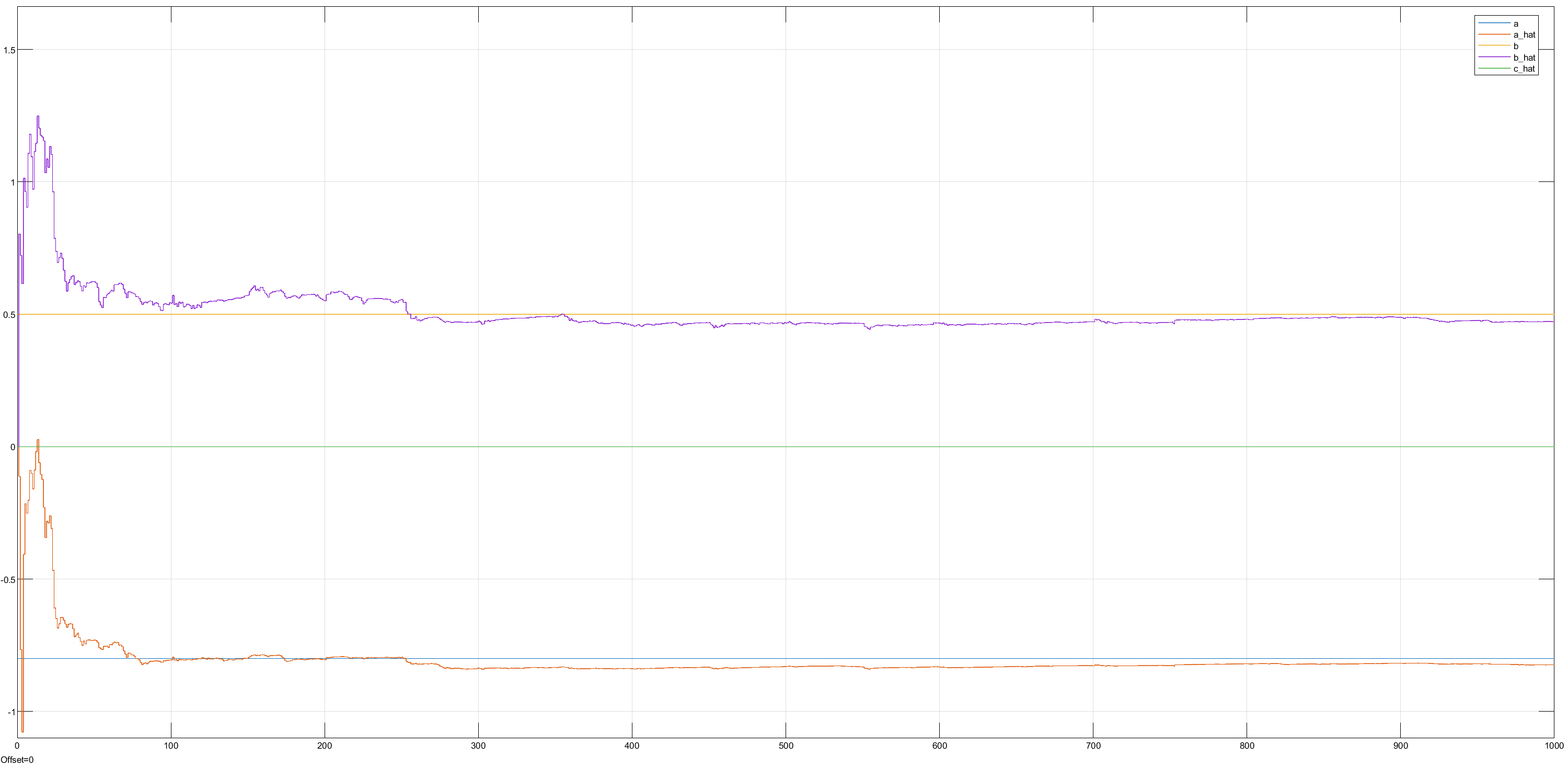
parametresinin düşük bir değer seçilmesi, yavaş, ancak kararlı tepkiler elde edileceği anlamına gelir.

Bu nedenle değeri *100\*I* olarak seçilmiştir. Bu değer ile sistemin aşırı tepkiler vermemesi, aynı zamanda da yakınsama hızının kabul edilebilir bir düzeyde tutulması amaçlanmıştır. *1000\*I* gibi bir değer seçilmesi, yakınsama hızını arttıracak, lakin stabiliteyi düşürecektir. Benzer şekilde, *0.01\*I* gibi bir değer seçilirse de yakınsama hızı çok yavaşlayacağından, istenilen sonuçların görülmesi için çok uzun süreler beklenmesi gerekecektir.

**Simülasyon Sonuçları**

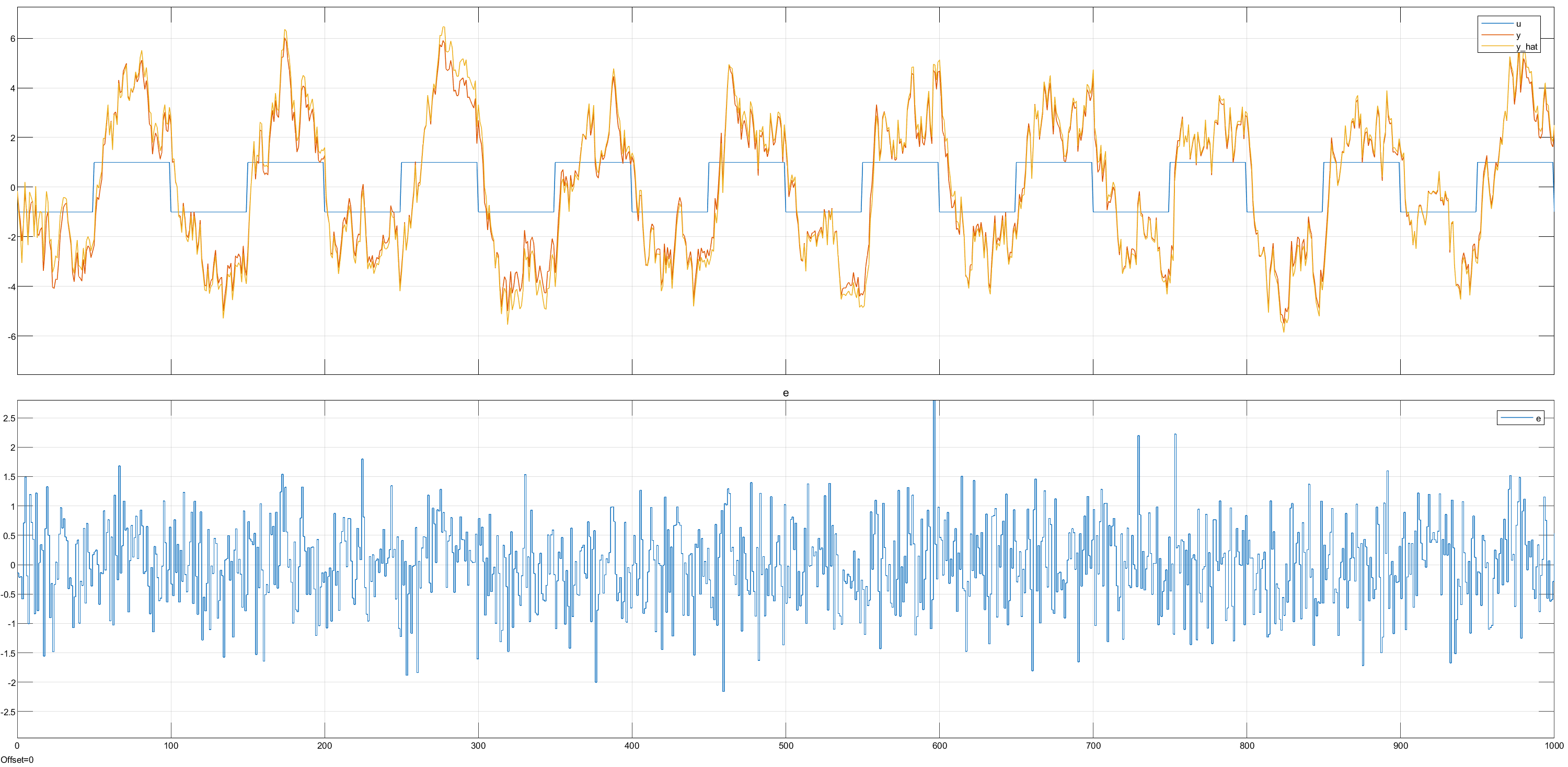
Bütün simülasyonlarda ve olarak ele alınmıştır.

* **Standart RLS Sonuçları:**

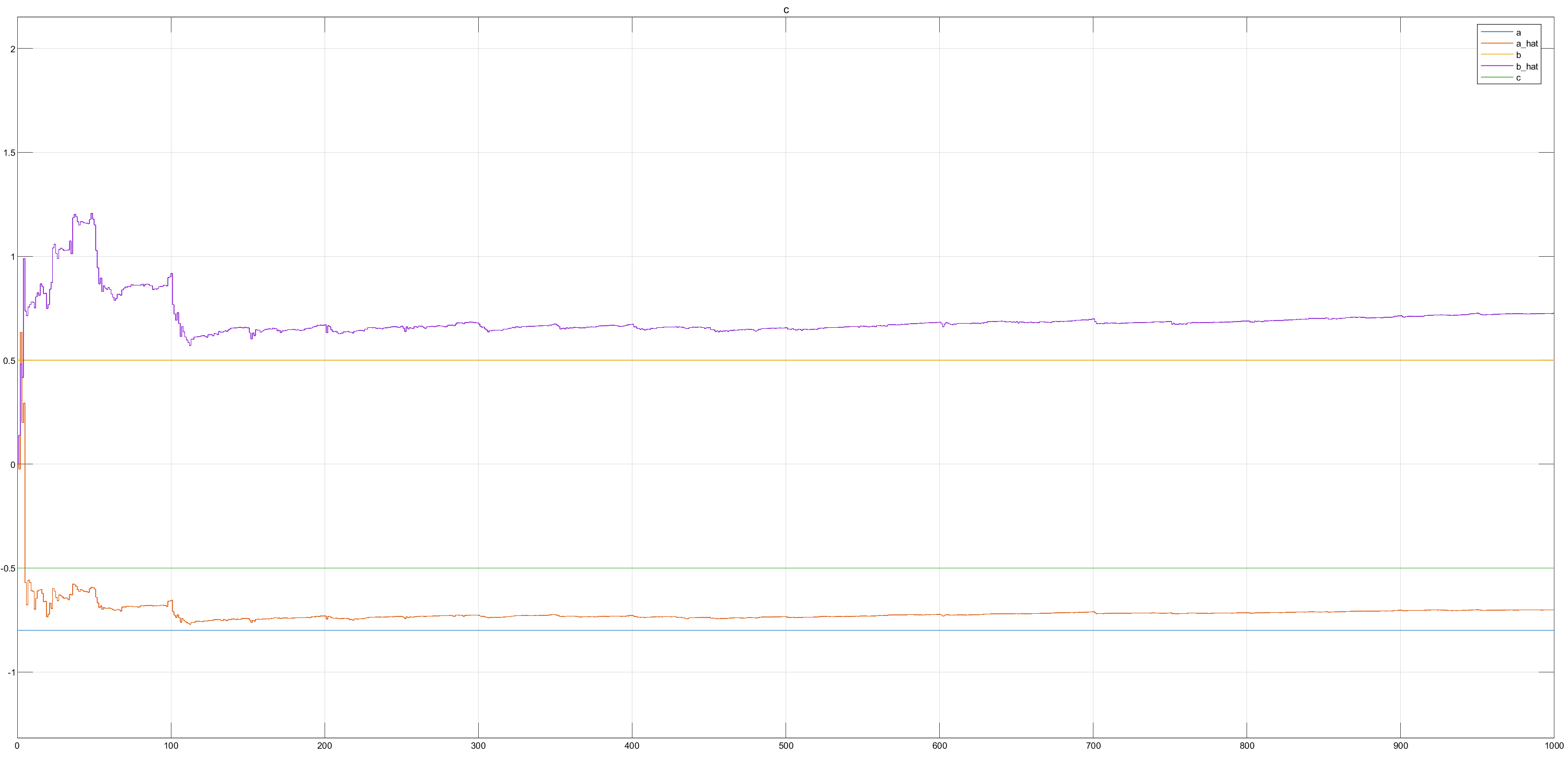


**Figür a.1 – c = 0 seçimi için RLS Algoritması ile Parametre Kestirimi**

Figür a.1’de c=0 seçimi için RLS tasarımı ile elde edilen parametre kestirimi verilmiştir. a ve b parametreleri için beklenildiği üzere sistem parametrelerinin değişmediği bir durumda RLS ile kestirim yapmayı başarmıştır. Figür a.2’de kare referans sinyali verildiği ve tahmin edilen parametreler ile elde edilen tahmini çıkışın, sistem çıkışı ile neredeyse aynı şekilde ilerlediği gözlemlenmektedir.

****

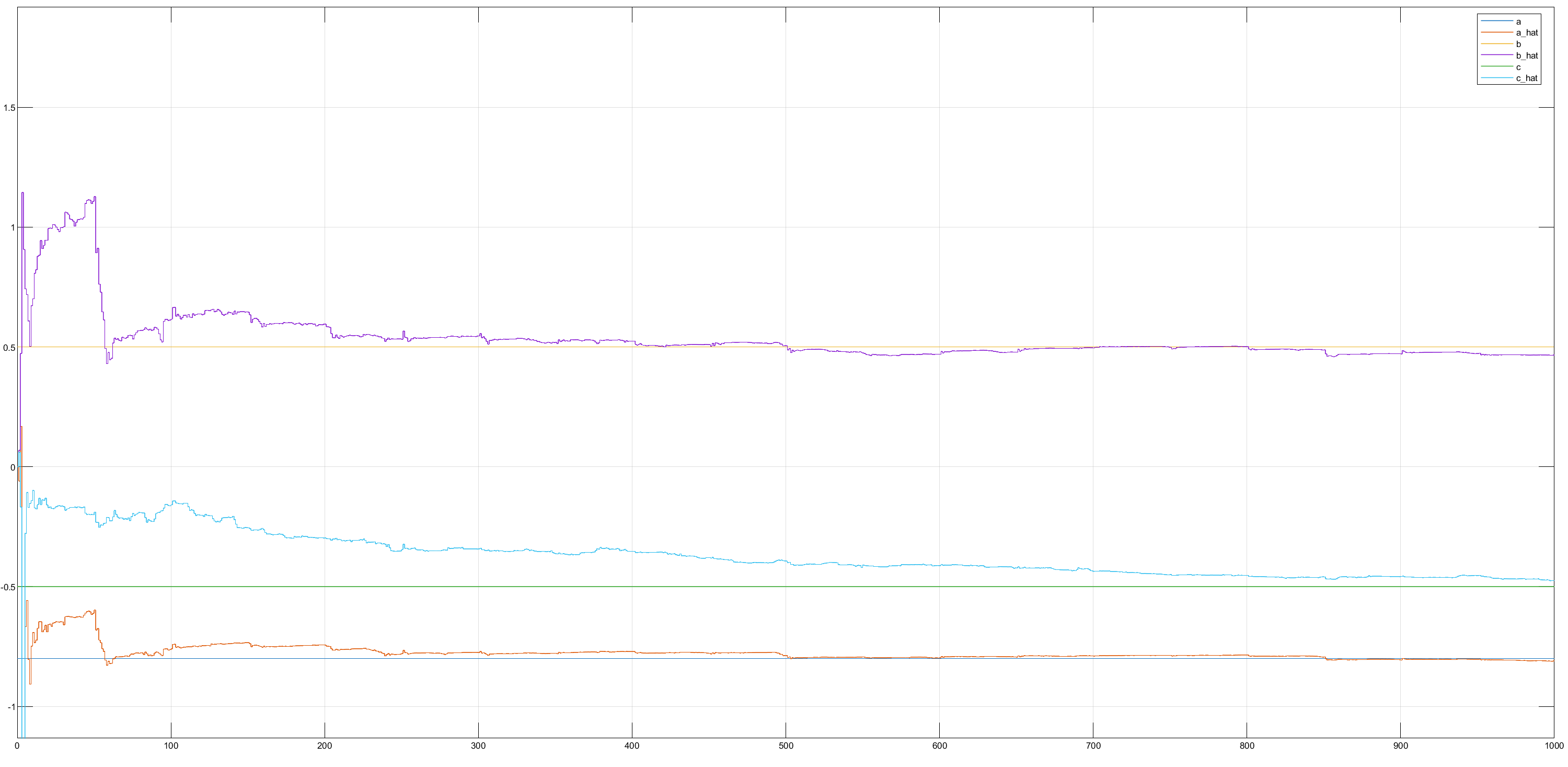
**Figür a.2 – c = 0 seçimi için RLS Algoritması ile Parametre Kestirimine göre Elde Edilen Çıkış ve Sisteme Verilen Gürültü**



**Figür a.3 - c = -0.5 seçimi için RLS Algoritması ile Parametre Kestirimi**

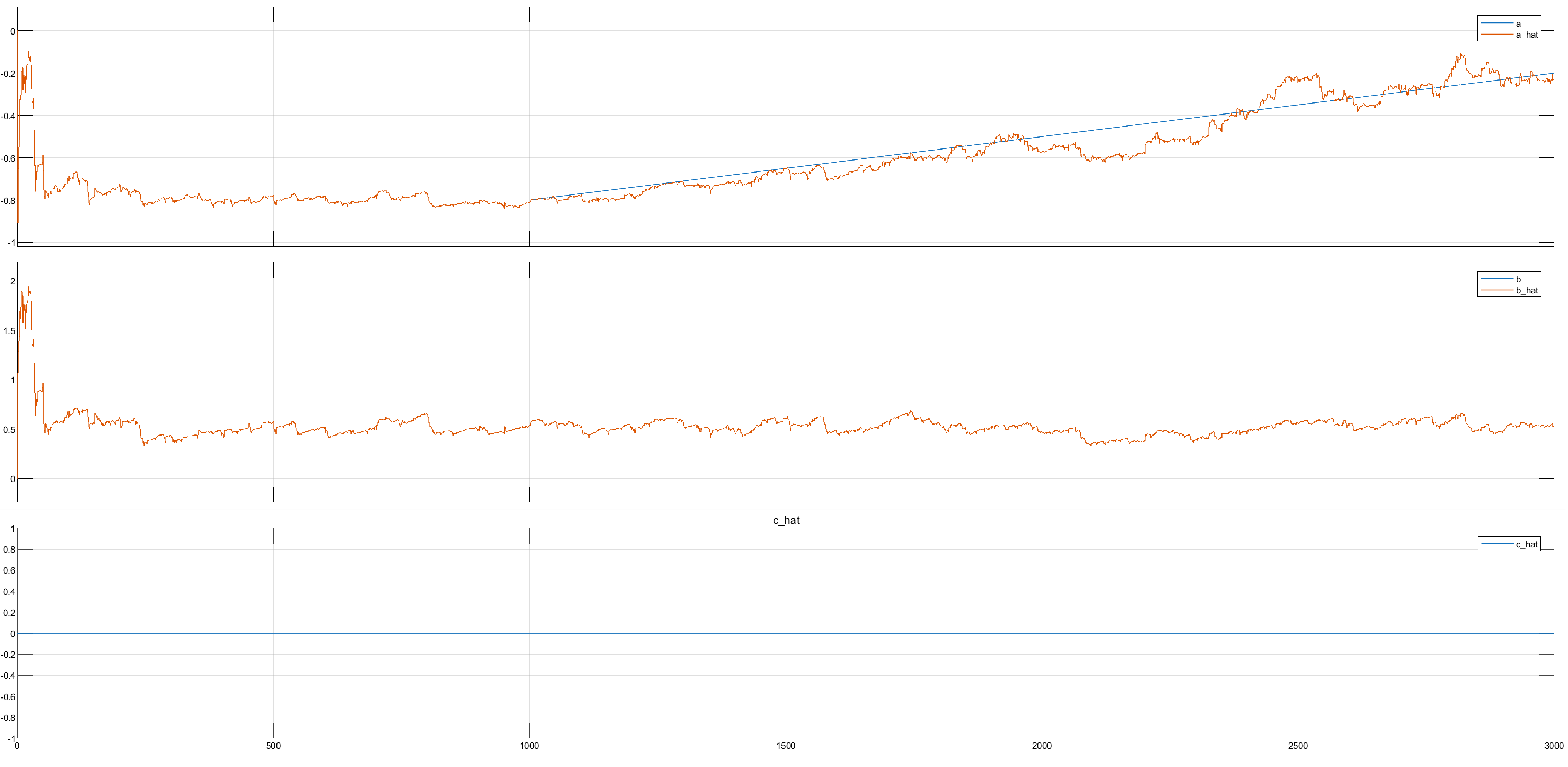
Figür a.3’de c=-05 seçimi için RLS tasarımı ile elde edilen parametre kestirimi verilmiştir. a ve b parametrelernin kestiriminde sürekli hal hataları gözlemlenmiştir. RLS regresyonu, c parametresi eklendiğinde başarılı bir şekilde parametre kestirememiştir.

Figür a.4’te, RLS’in aksine, c parametresi eklendiği zaman ELS yönteminin beklendiği üzere parametre kestirimini başarıyla gerçekleştirdiği görülmektedir.



**Figür a.4 – c = -0.5 seçimi için ELS Algoritması ile Parametre Kestirimi**

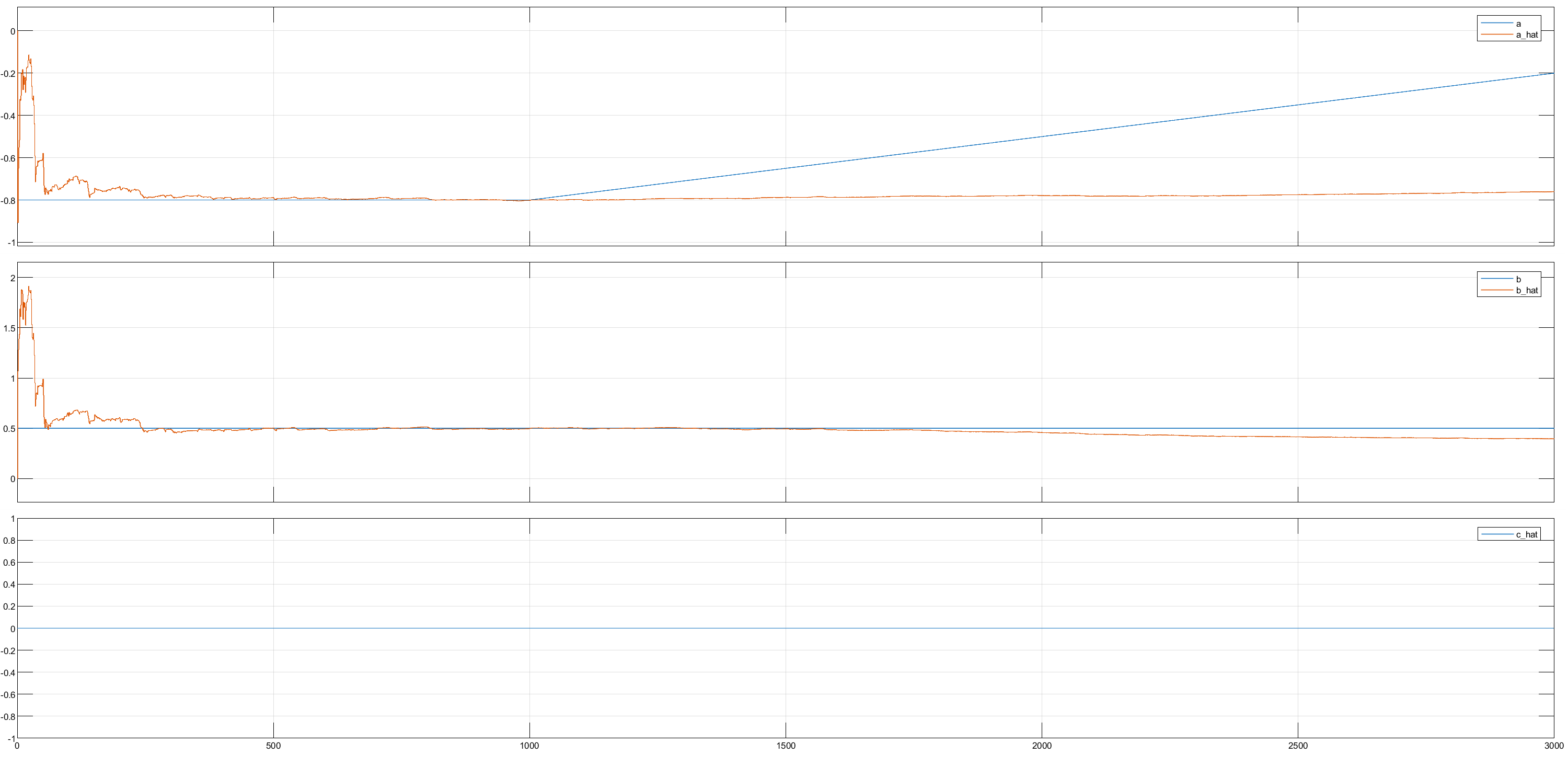
* **Unutma Faktörlü RLS Sonuçları:**



**Figür a.5 – c = 0 seçimi için Unutma Faktörlü RLS Algoritması ile Parametre Kestirimi**

Figür a.5’te, unutma faktörlü RLS metodu uygulanmıştır. Unutma faktörü değeri 0.99 seçilmiştir, çünkü daha düşük unutma faktörlerinde sistemin fazla hızlı unutulduğu ve parametre kestiriminin aşırı dalgalanma nedeniyle yapılamadığı; fazla yüksek unutma faktörü seçimlerinde de değişen sistem parametresine yeterince hızlı tepki verilemediği gözlemlenmiştir.

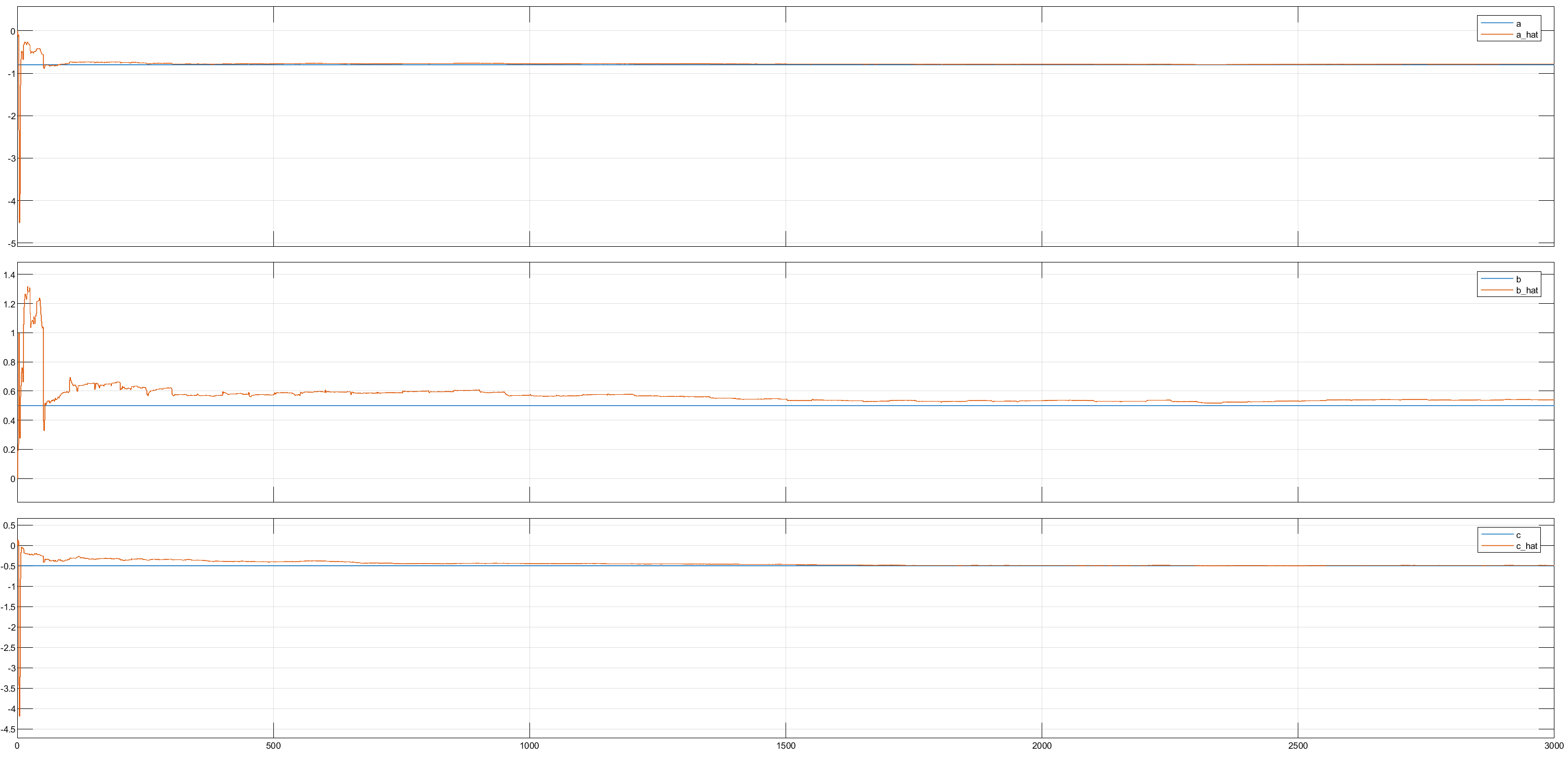
Unutma faktörünün etkisinin görülebilmesi için Figür a.5’te görüldüğü üzere a parametresine t=1000 saniyede rampa giriş sinyali eklenmeye başlanmıştır. Unutma faktörü sayesinde sistem yeni parametrelere daha fazla ağırlık vererek parametre kestirimini başarıyla devam ettirmiş ve istenen parametre değerini takip edebilmiştir.



**Figür a.6 – c = 0 seçimi için Standart RLS Algoritması ile Değişken Parametre için Kestirim**

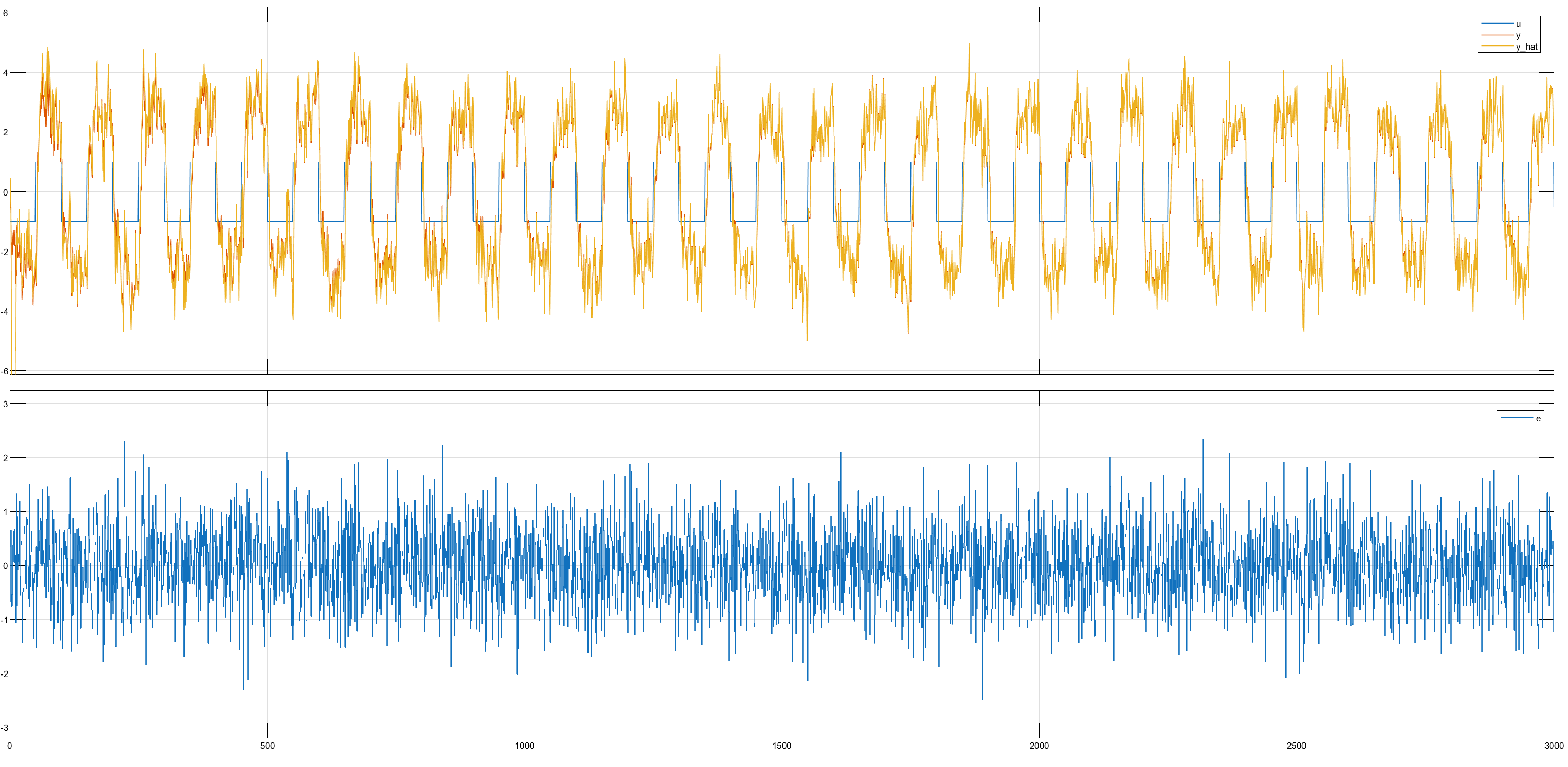
Figür a.6’da, unutma faktörlü RLS parametre kestirimindeki gibi, standart RLS sistemine t=1000 saniyede bir rampa giriş sinyali verilmiştir. Sistem başlangıç parametrelerine bağlı kaldığından dolayı parametrenin zaman içindeki değişimine tepki göstermemiş ve takip başarısız olmuştur. Bu iki figürden anlaşıldığı üzere, zaman içinde değişen parametreler için RLS algoritması kullanılacak ise, unutma faktörü hesaba katılarak tasarım yapılmalıdır.

* **ELS Sonuçları**



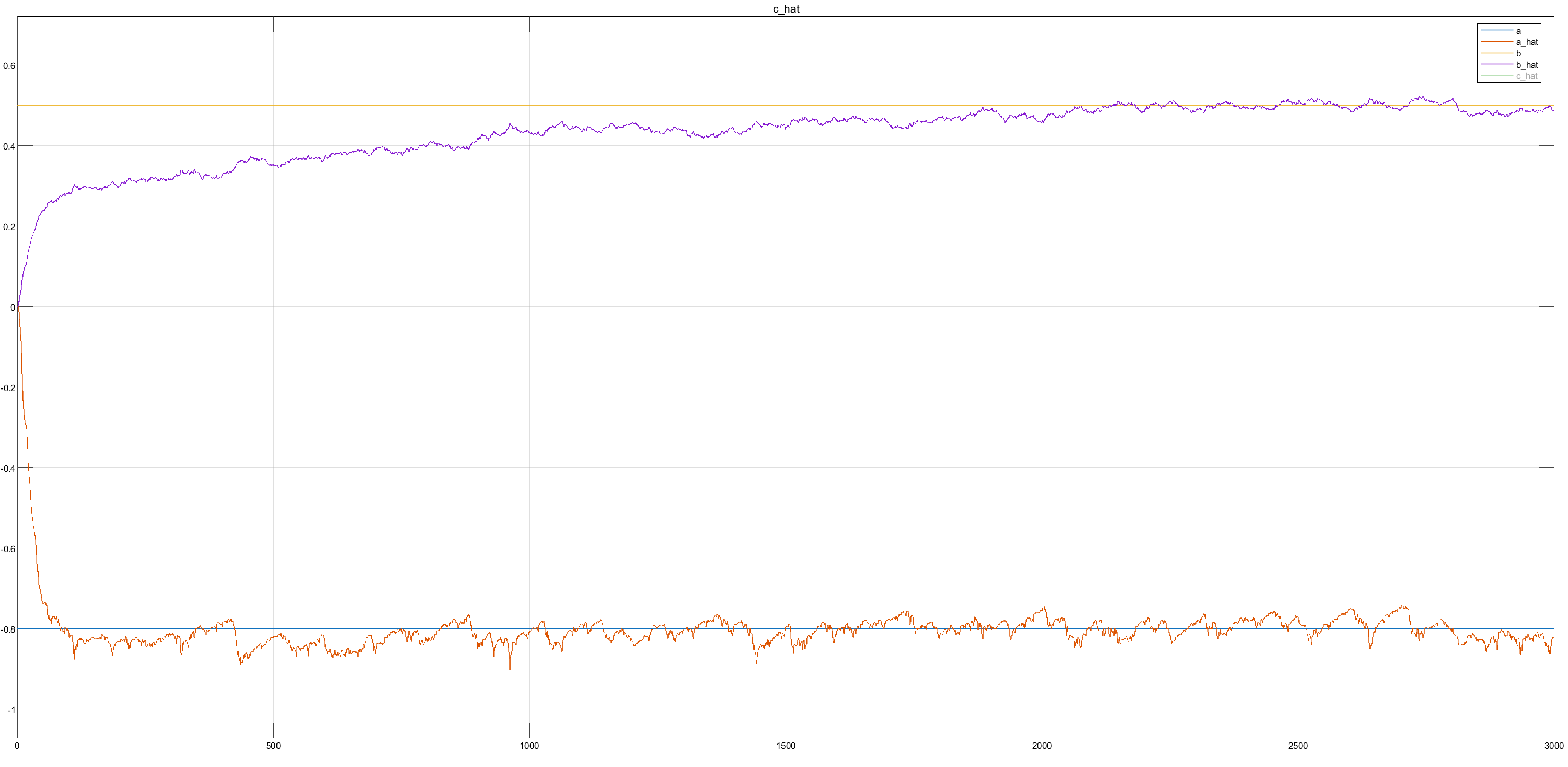
**Figür a.7 – c = -0.5 seçimi için ELS Algoritması ile Parametre Kestirimi**

Figür a.7’de c=-0.5 seçimi için ELS tasarımı ile elde edilen parametre kestirimi verilmiştir. a, b ve c parametreleri için beklenildiği üzere sistem parametrelerinin değişmediği bir durumda ELS ile kestirim yapmayı başarmıştır. Figür a.8’de kare referans sinyali verildiği ve tahmin edilen parametreler ile elde edilen tahmini çıkışın, sistem çıkışı ile neredeyse aynı şekilde ilerlediği gözlemlenmektedir.



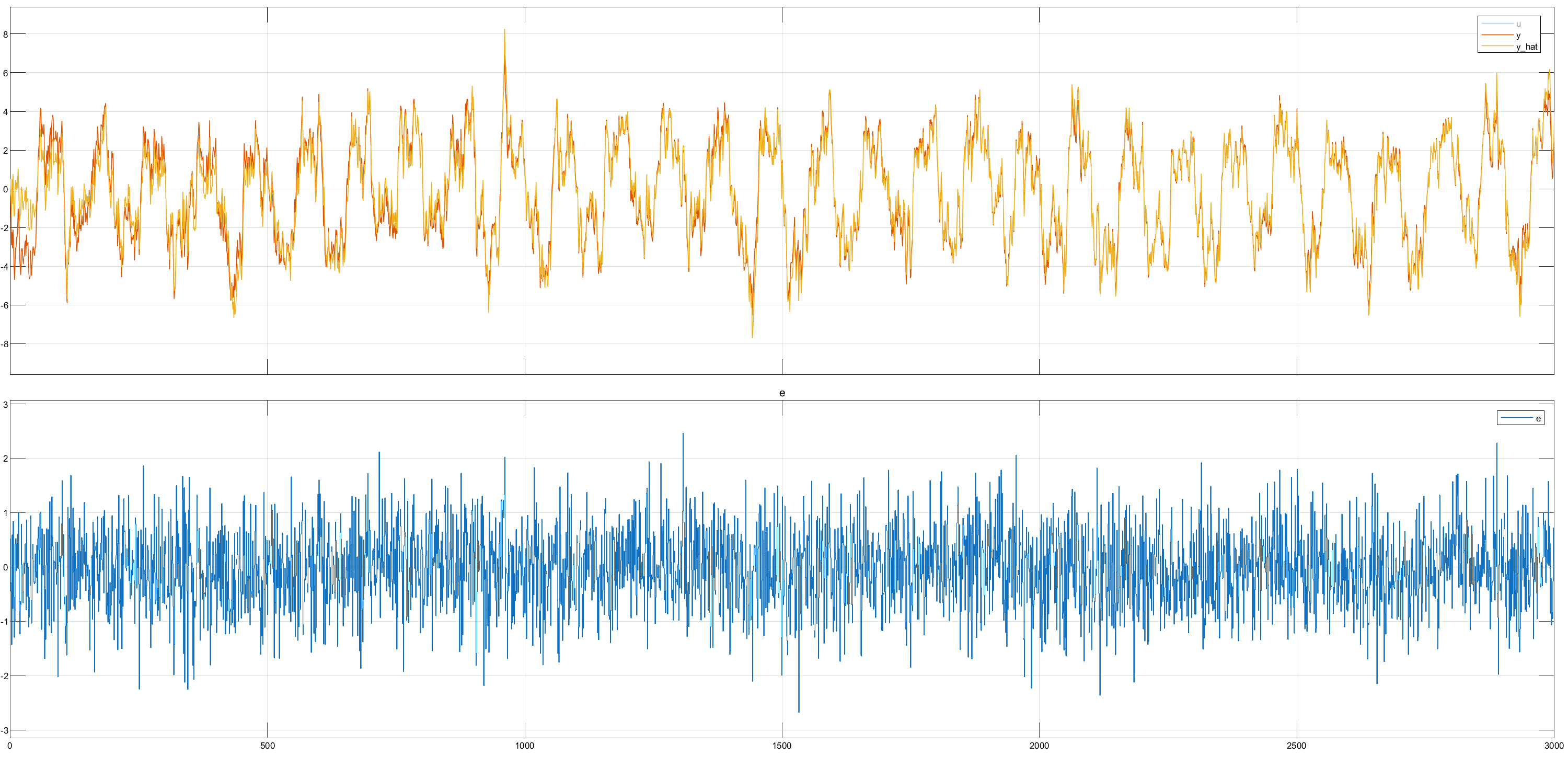
**Figür a.8 – c = -0.5 seçimi için ELS Algoritması ile Parametre Kestirimine göre Elde Edilen Çıkış ve Sisteme Verilen Gürültü**

* **LMS Sonuçları**



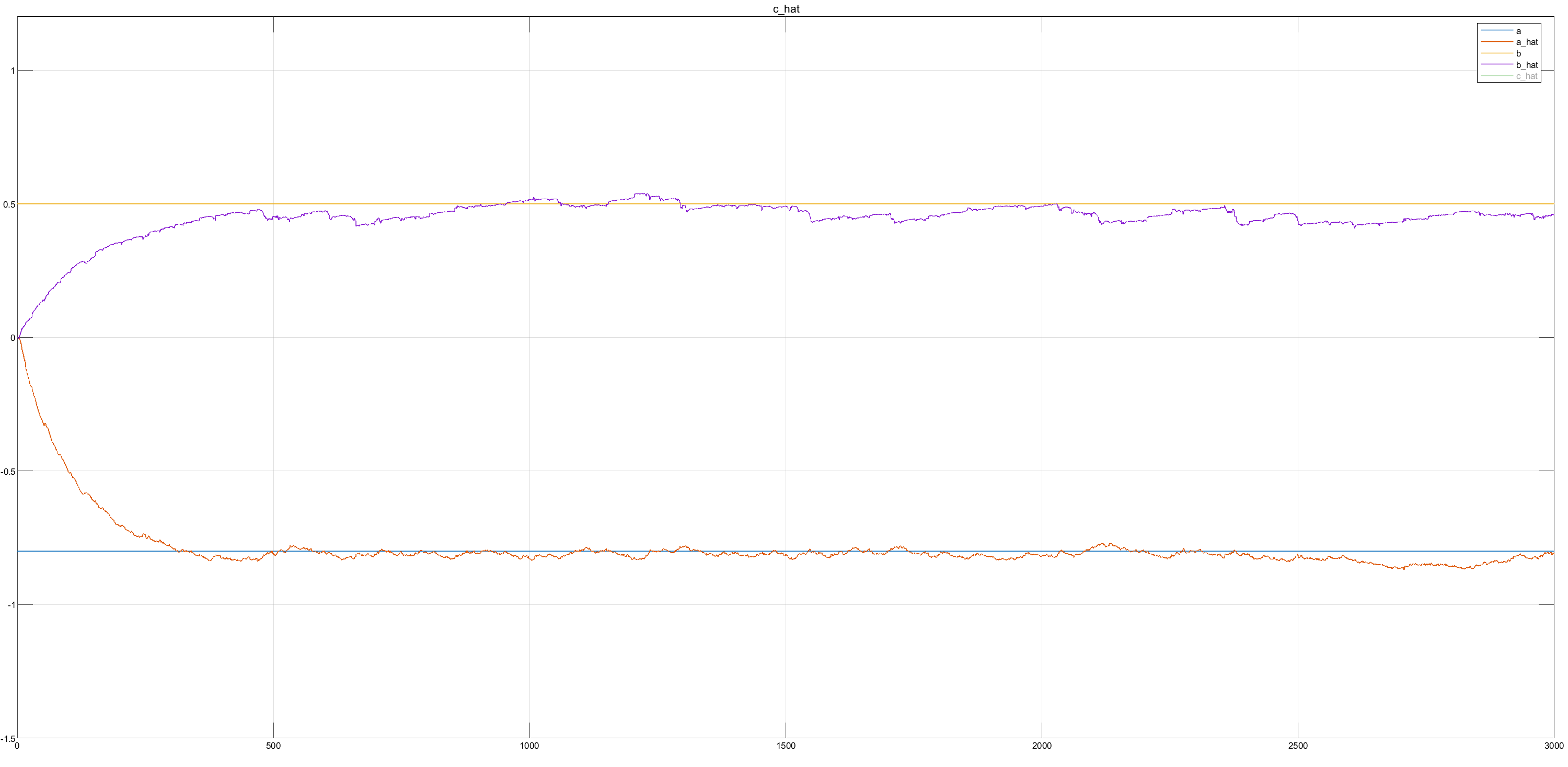
**Figür a.9 – c = 0 seçimi için LMS Algoritması ile Parametre Kestirimi**

Figür a.9’da c = 0 seçimi için LMS tasarımı ile elde edilen parametre kestirimi verilmiştir. a ve b parametreleri için beklenildiği üzere sistem parametrelerinin değişmediği bir durumda LMS ile kestirim yapmayı başarmıştır. seçilmiştir. Yaklaşım yavaş, ancak az salınımlı, düzgün bir şekilde olmuştur. LMS algoritmasının diğer algoritmalara kıyasla basit bir matematiksel yaklaşım içerdiğini ve gerçek sistemde uygulamasının kolay olduğu, ancak sonuçların diğer algoritmalara kıyasla daha kötü olduğu yorumu yapılabilir. Figür a.10’da kare referans sinyali verildiği ve tahmin edilen parametreler ile elde edilen tahmini çıkışın, sistem çıkışı ile neredeyse aynı şekilde ilerlediği gözlemlenmektedir.



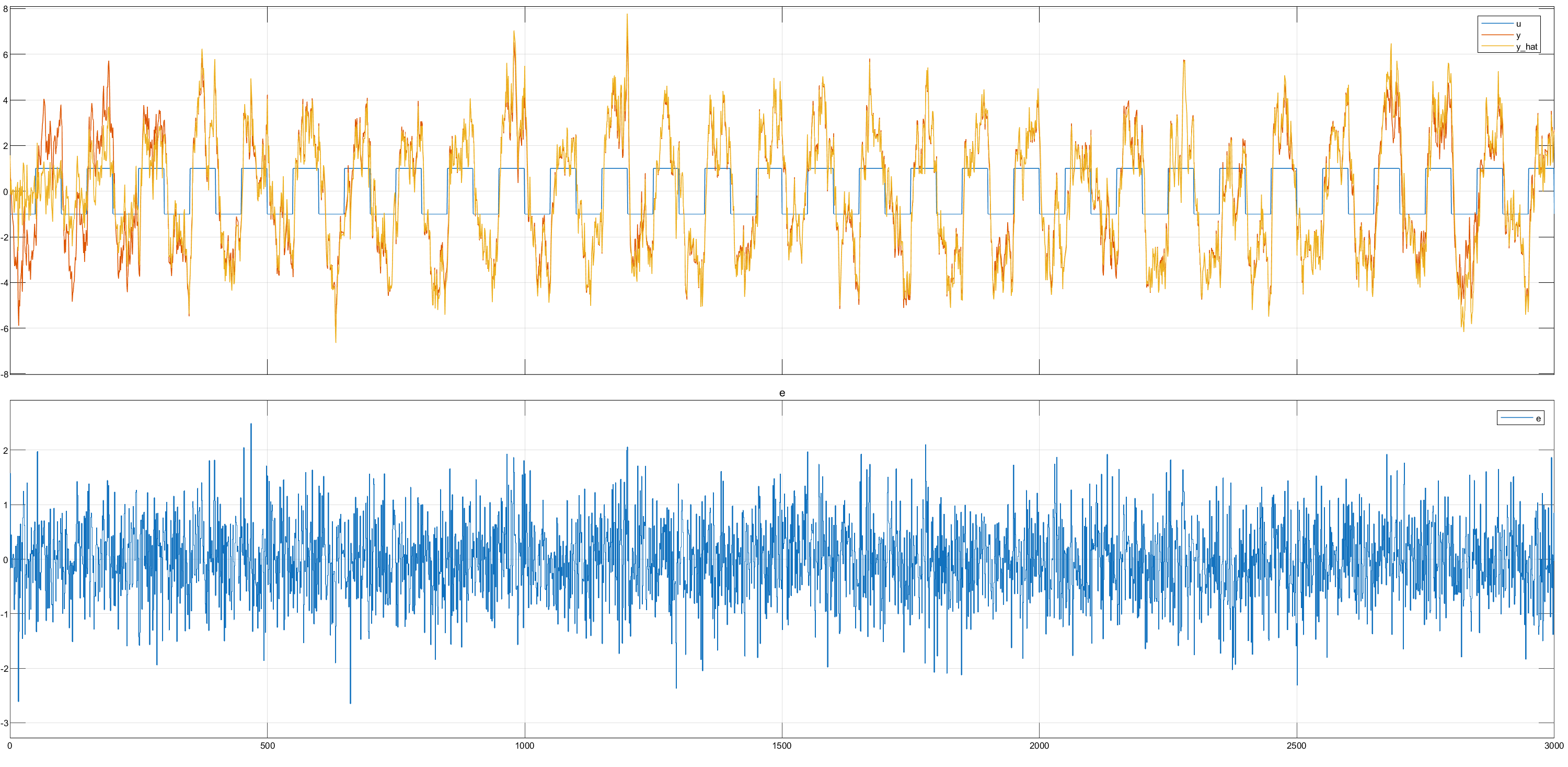
**Figür a.10 – c = 0 seçimi için LMS Algoritması ile Parametre Kestirimine göre Elde Edilen Çıkış ve Sisteme Verilen Gürültü**

* **PA Sonuçları**



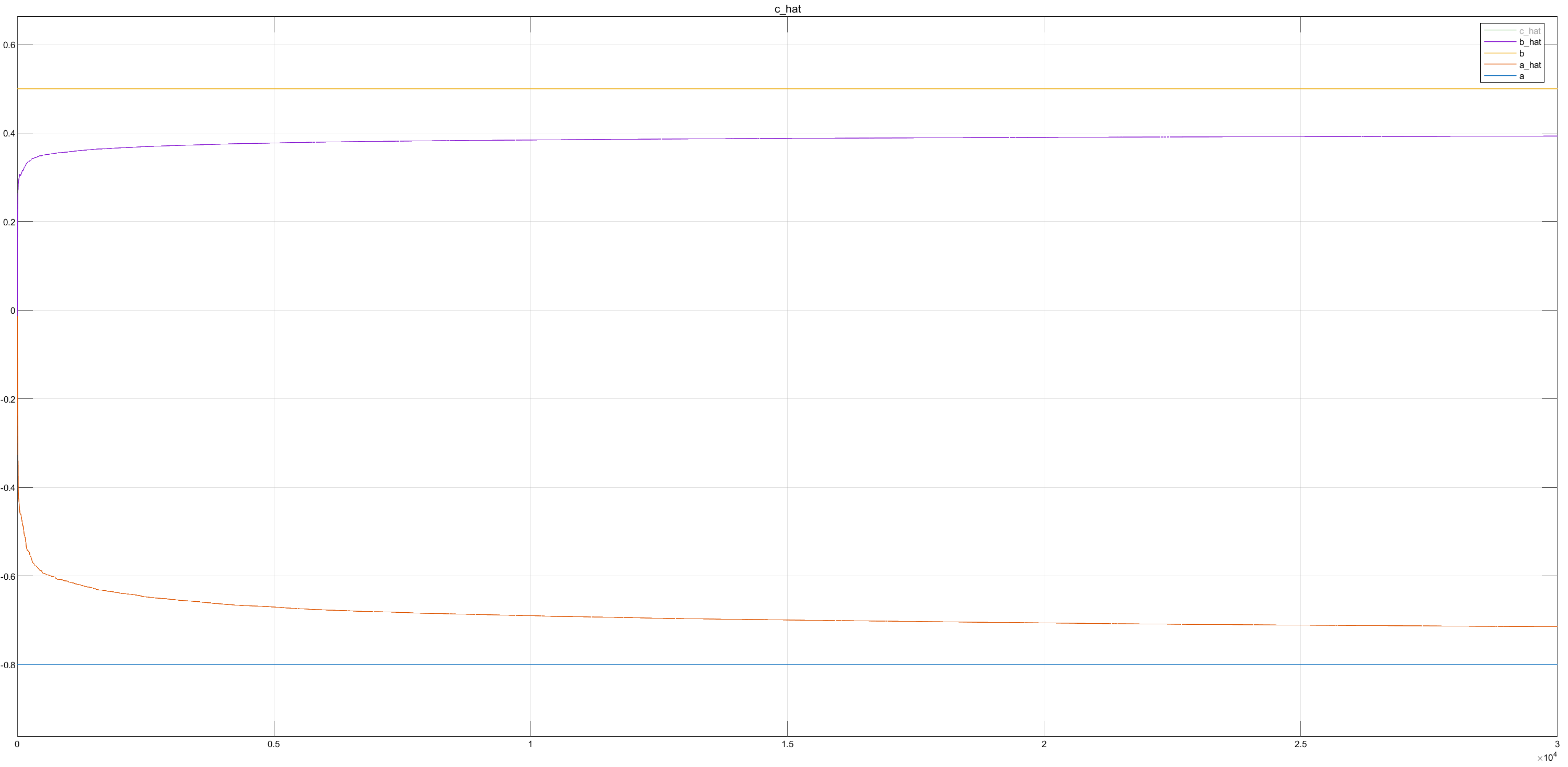
**Figür a.11 – c = 0 seçimi için PA Algoritması ile Parametre Kestirimi**

Figür a.11’da c = 0 seçimi için PA tasarımı ile elde edilen parametre kestirimi verilmiştir. a ve b parametreleri için beklenildiği üzere sistem parametrelerinin değişmediği bir durumda PA ile kestirim yapmayı başarmıştır. seçilmiştir. Öğrenim yavaş ancak sabit olmuştur. LMS’e kıyasla PA algoritması daha güvenli ve stabil sonuçlar vermiştir. Figür a.12’da kare referans sinyali verildiği ve tahmin edilen parametreler ile elde edilen tahmini çıkışın, sistem çıkışı ile neredeyse aynı şekilde ilerlediği gözlemlenmektedir.



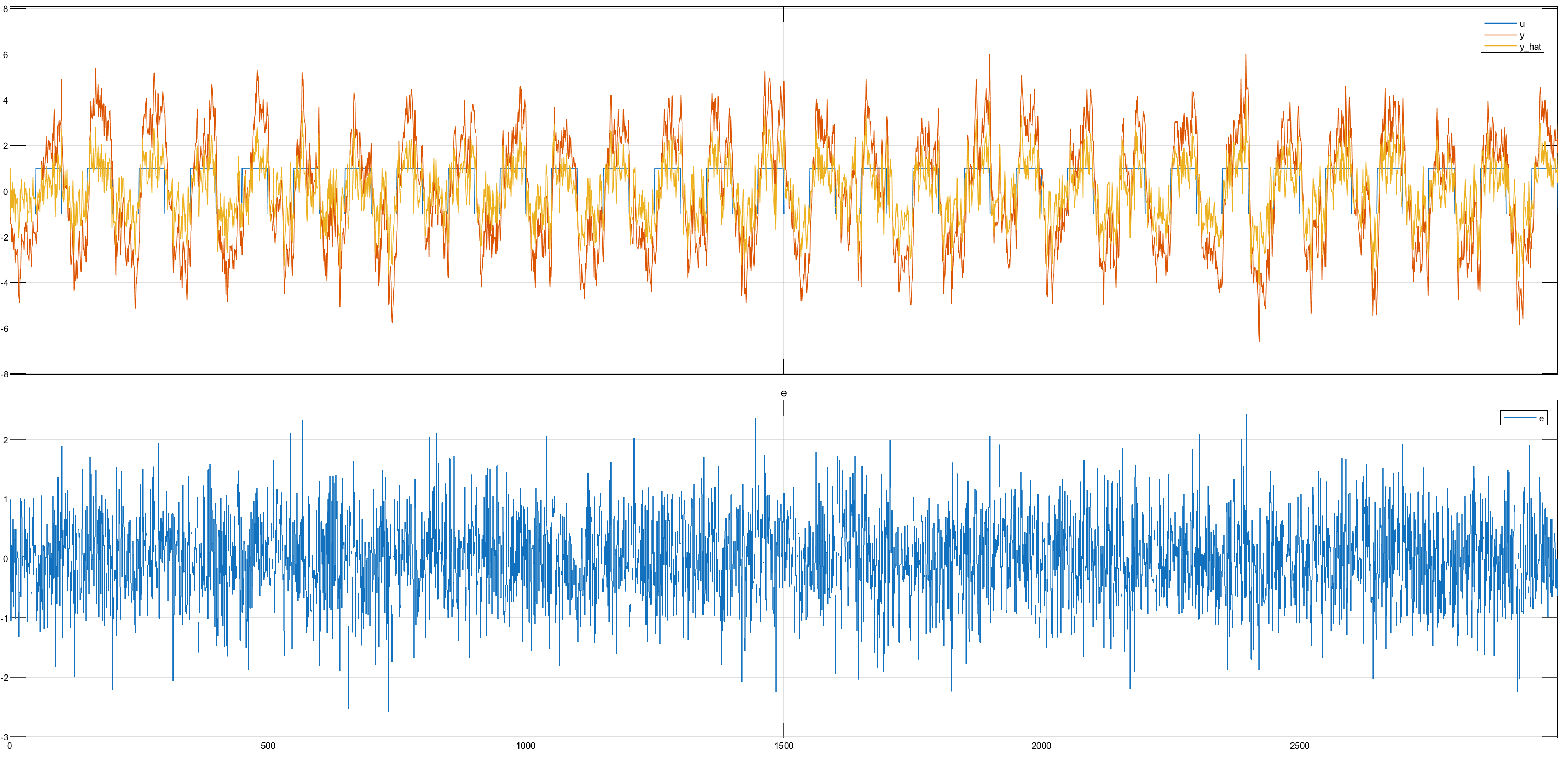
**Figür a.12 – c = 0 seçimi için PA Algoritması ile Parametre Kestirimine göre Elde Edilen Çıkış ve Sisteme Verilen Gürültü**

* **SA Sonuçları**



**Figür a.13 – c = 0 seçimi için SA Algoritması ile Parametre Kestirimi**

Figür a.13’da c = 0 seçimi için PA tasarımı ile elde edilen parametre kestirimi verilmiştir. a ve b parametreleri için beklenildiği üzere sistem parametrelerinin değişmediği bir durumda SA ile kestirim yapmayı başarmıştır. Öğrenim hızı, kovaryans güncellemesinin gittikçe azalmasından kaynaklı olarak, istenilen parametre değerine yaklaştıkça azalmaktadır. Buna karşın, salınımsız bir sonuç alınacak, yakınsama garanti altında kalacak ve gürültüye karşı yüksek bir direnç gözlemlenecektir. Figür a.14’da kare referans sinyali verildiği ve tahmin edilen parametreler ile elde edilen tahmini çıkışın, sistem çıkışı ile farklılık gösterdiği, gittikçe yaklaştığı ancak tam olarak takip edemediği gözlemlenmiştir. Kestirim süresi uzadıkça, çıkış sinyalleri de yakınlaşacaktır.



**Figür a.14 – c = 0 seçimi için SA Algoritması ile Parametre Kestirimine göre Elde Edilen Çıkış ve Sisteme Verilen Gürültü**

**Soru b)**

|  |  |
| --- | --- |
|  | **(b.1)** |
|  |  |

Simülasyonlarda seçilmiştir.

|  |  |
| --- | --- |
|  | **(b.i.1)** |
|  |  |
|  | **(b.i.2)** |
|  |  |

**RLS:**

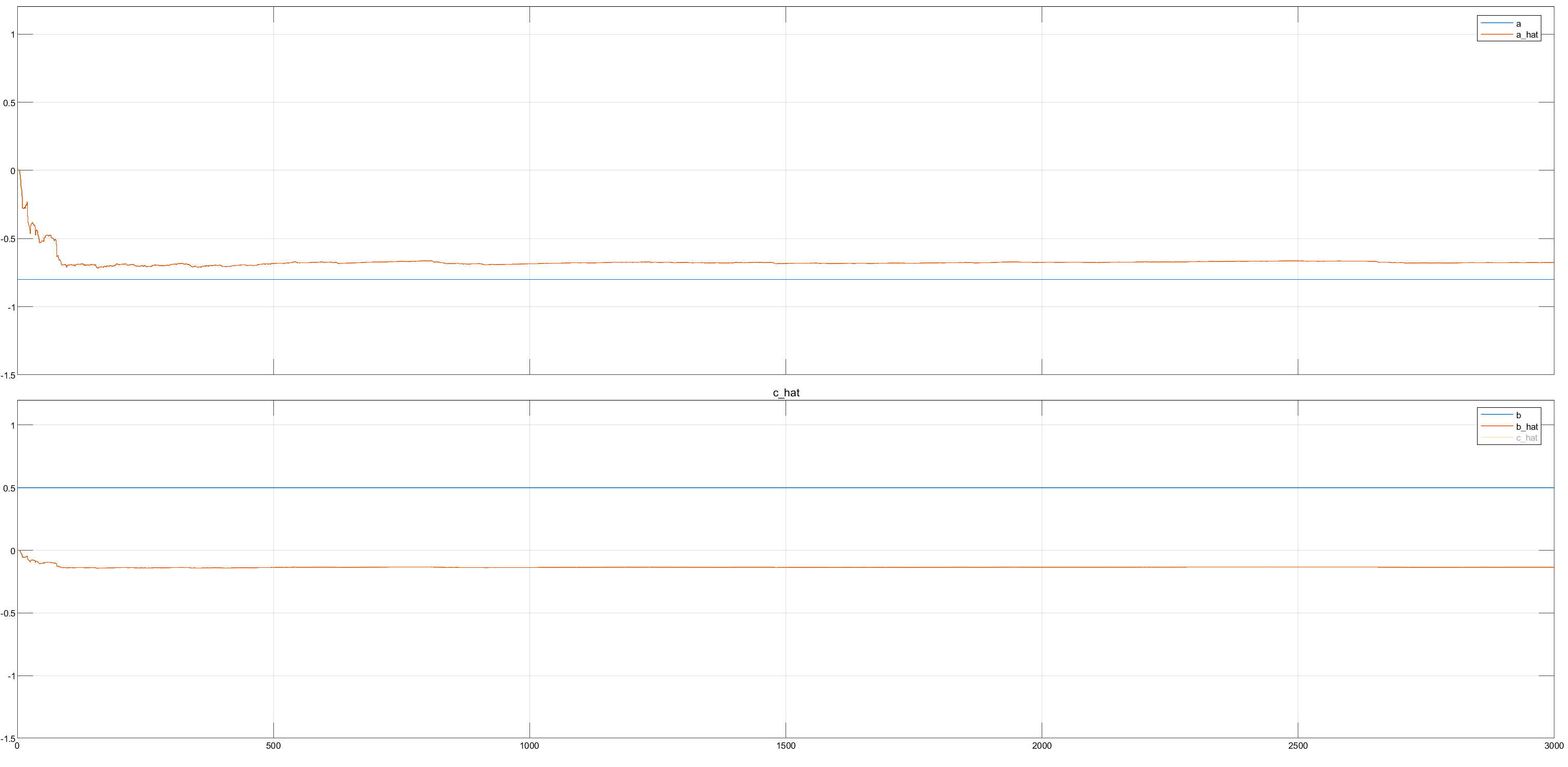
Denklem b.i.2’de görüldüğü gibi, RLS için a ve b parametreleri birbirinden ayrılamayan bir hale geldiğinden, bu parametrelerin herhangi birinin istendiği değere ulaşması durumunda diğer değer kontrol edilemeyecek ve Geri Besleme sebebiyle tanımlanabilirliğini kaybedecektir.

|  |  |
| --- | --- |
|  | **(b.i.3)** |
|  |  |

Denklem b.i.3’te görüldüğü üzere, RLS yöntemi için elde edilen regresyon vektörünün elemanlarının her ikisi de ’e bağlı olduğundan regresyonun derecesi düşer.

b ve a parametreleri, sabit bir eğimiyle değişmekte olduğu için, parametreler birbirine bağımlı bir hale gelmiştir. Bu durumda RLS ile iki parametreyi birden kontrol etmek mümkün değildir.

Eğer kontrol sinyali, zamana bağlı değişen bir değişkeni olarak tanımlansaydı, eğim sürekli değişeceğinden a ve b parametreleri RLS regresyon yöntemiyle öğrenilebilir olacaktı.



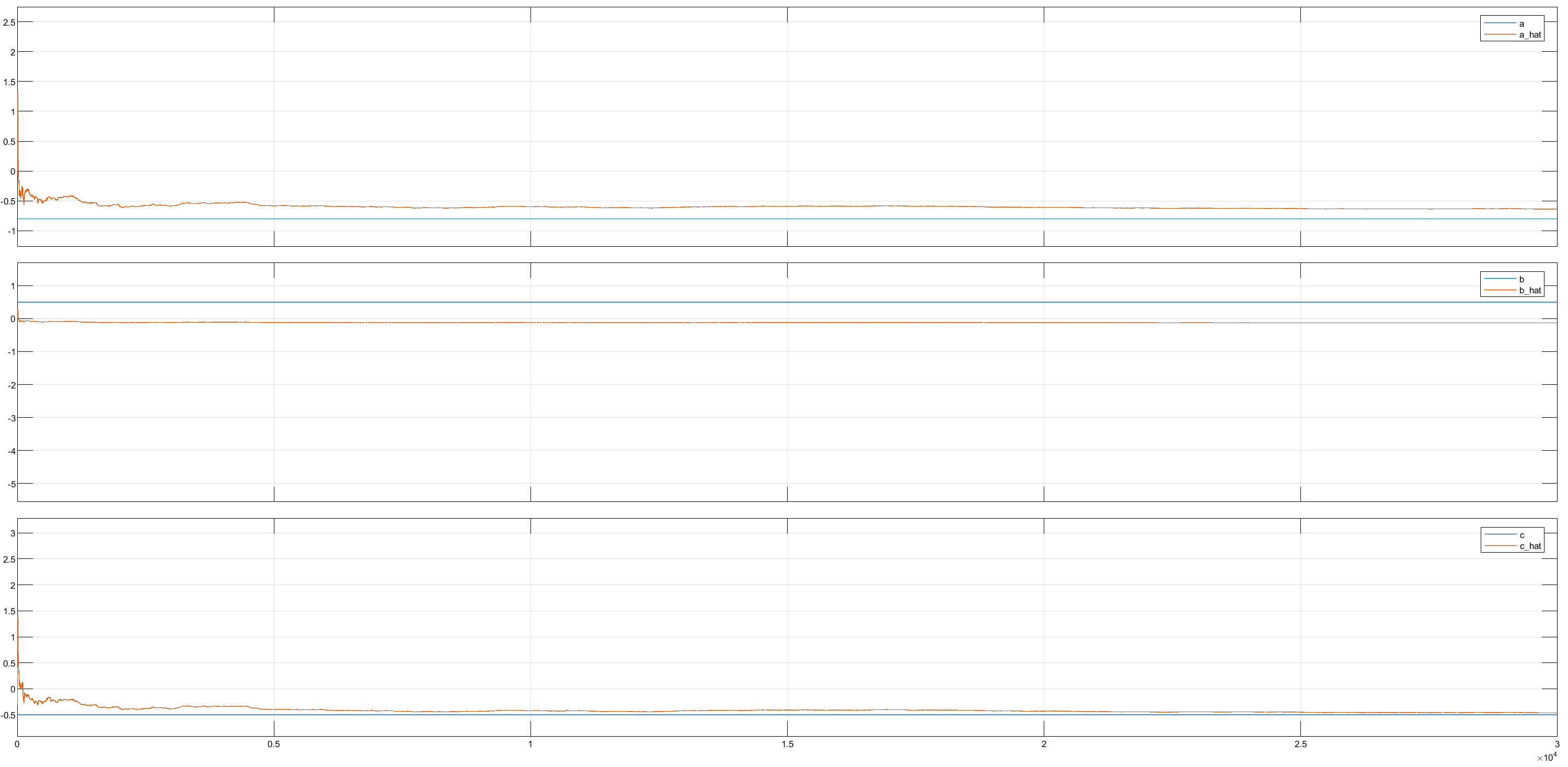
**Figür b.1 – 0.2 Geri Besleme Kazancı ile RLS Algoritmasına göre Parametre Kestirimi**

Figür b.1’de de görüldüğü üzere, RLS algoritmasında sistem a parametresinin yakınsamasını sağlarken, b parametresi a ile bağımlı olduğundan, sürekli bir hal hatası alınmıştır ve b parametresi yakınsayamamıştır.

**ELS:**

|  |  |
| --- | --- |
|  | **(b.i.4)** |
|  |  |

Denklem b.i.3’te görüldüğü üzere, ELS yöntemi için elde edilen regresyon vektörünün elemanlarının ikisi ’e bağlı olduğundan regresyonun derecesi düşer. Bu nedenle RLS’de olduğu gibi a ve b parametreleri birbirine bağımlı olarak güncellenecek ve istenilen yakınsama gözlemlenemeyecektir.



**Figür b.2 – 0.2 Geri Besleme Kazancı ile ELS Algoritmasına göre Parametre Kestirimi**

Figür b.2’de görüldüğü üzere, ELS algoritmasında da b parametresi bağımlı olduğundan, sürekli hal hatası alınmaktadır. Bu da bütün parametrelerin aynı anda yakınsamasına engel olmaktadır.

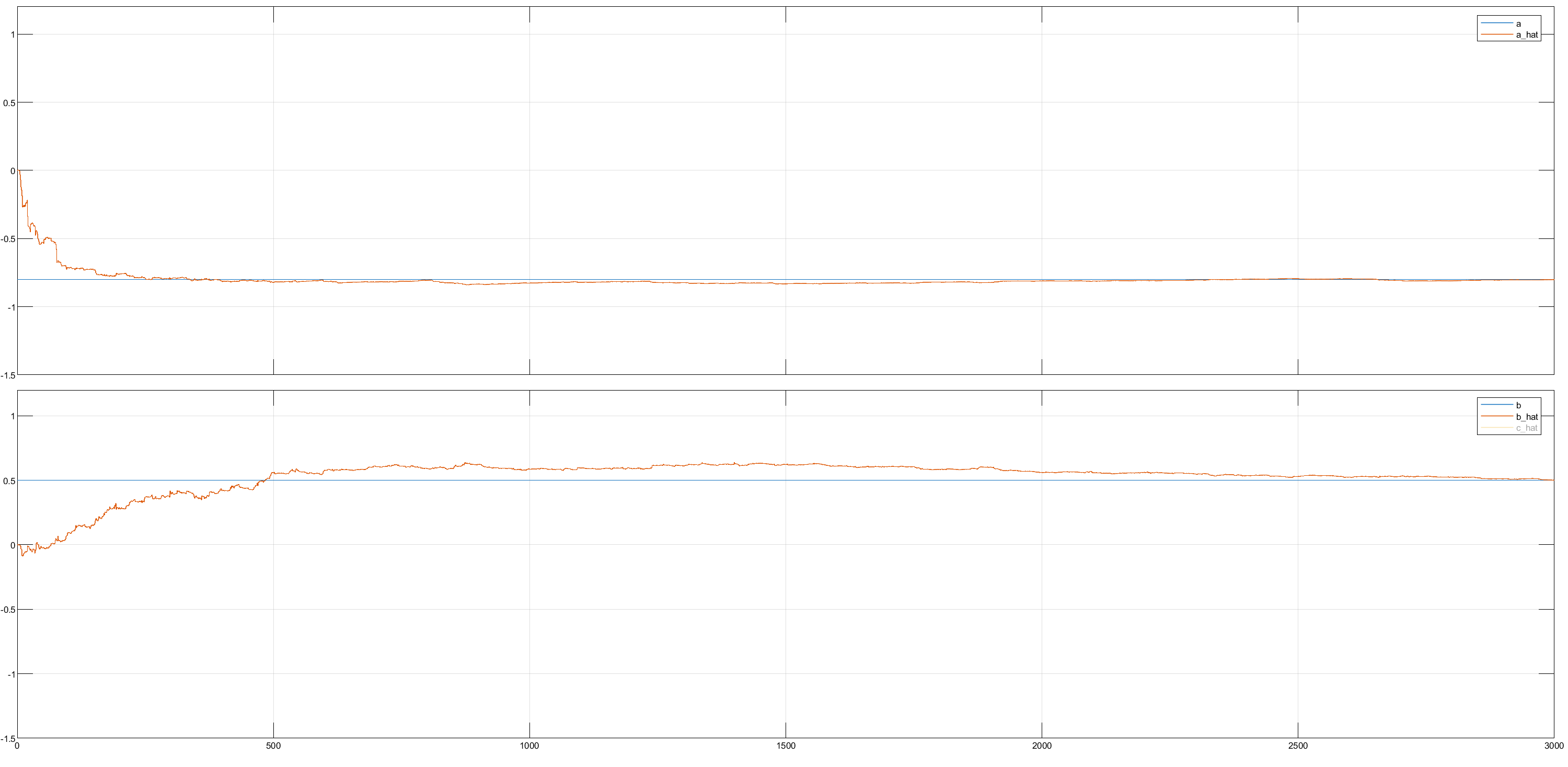
|  |  |
| --- | --- |
|  | **(b.ii.1)** |
|  |  |

**RLS:**

Denklem b.ii.1’de görüldüğü gibi, kontrol sinyali olarak çıkış sinyalinin bir örnekleme zamanı dikkate alındığından, a ve b parametreleri birbirinden ayrı bir şekilde hesaplanabilir bir hale gelmiştir. Bu durumda a ve b parametreleri öğrenilebilir bir durumdadır.

|  |  |
| --- | --- |
|  | **(b.ii.2)** |
|  |  |

Denklem b.ii.2’te görüldüğü üzere, RLS yöntemi için elde edilen regresyon vektörünün elemanları farklı örnekleme zamanlarındaki çıkış sinyaline bağlı olduğundan regresyonun derecesi düşmez ve parametreler istendiği gibi yakınsanabilir.

****

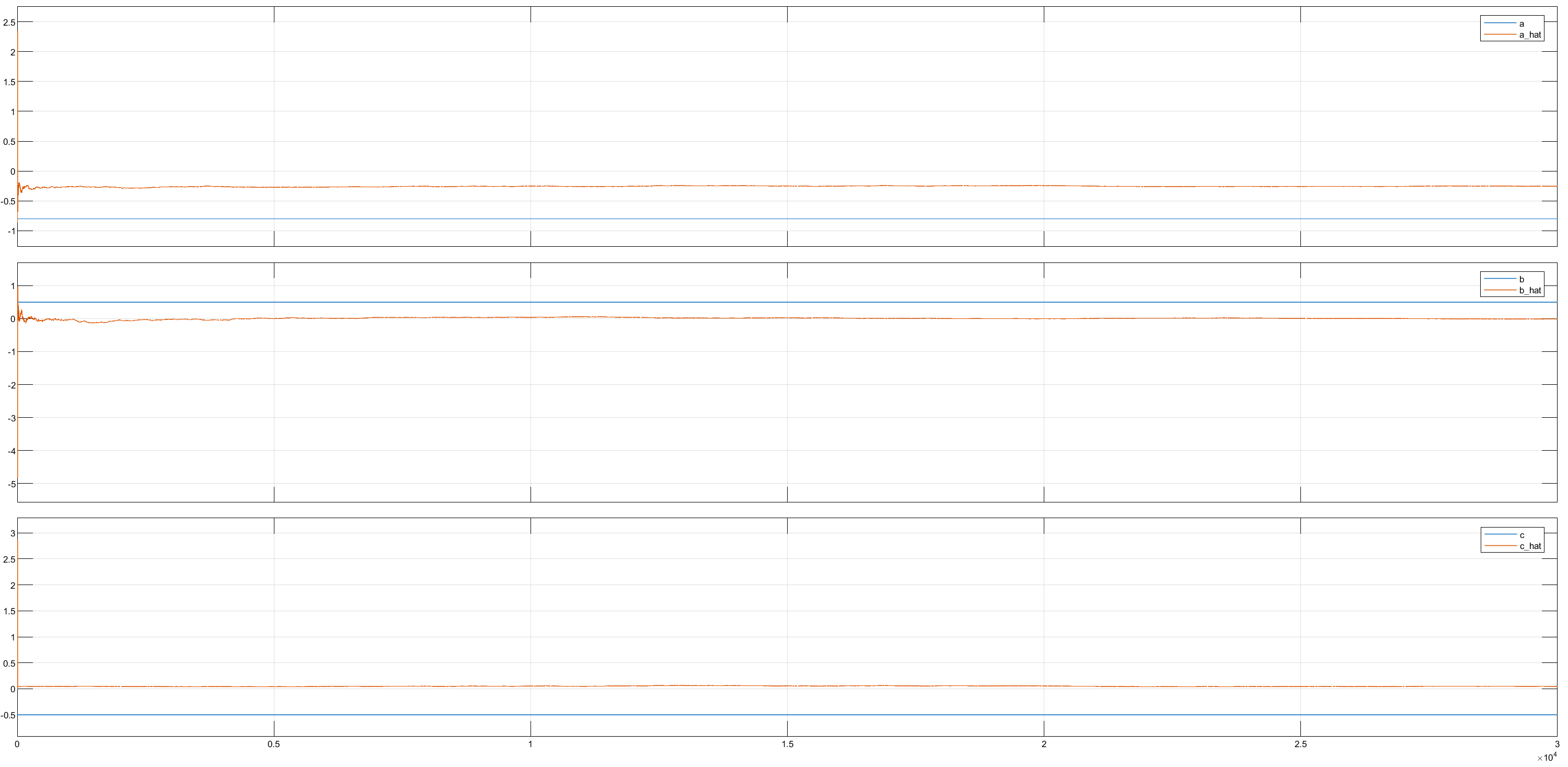
**Figür b.3 – Birim Gecikmeli 0.32 Geri Besleme Kazancı ile RLS Algoritmasına göre Parametre Kestirimi**

Figür b.3’de de görüldüğü üzere, RLS algoritmasında sistemdeki birim gecikmeli Geri Besleme sinyali sebebiyle, hem b parametresi hem de a parametresi de bağımsız olduğu için parametre yakınsaması istenildiği gibi elde edilebilmektedir. Birim gecikmeli sistemde RLS algoritması başarılı bir şekilde parametre kestirimi yapabilmiştir.

**ELS:**

|  |  |
| --- | --- |
|  | **(b.ii.3)** |
|  |  |

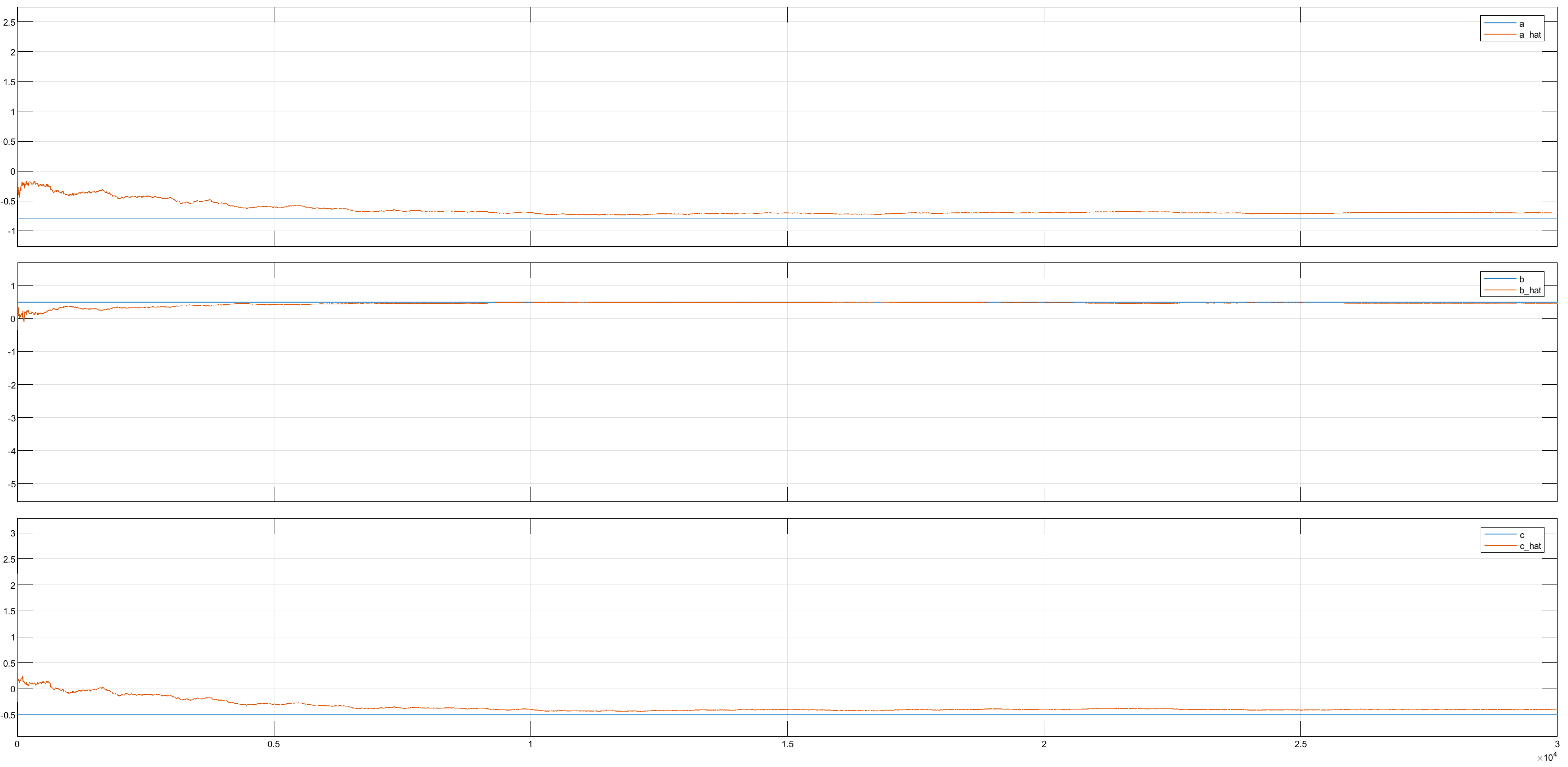
Denklem b.i.3’te görüldüğü üzere, RLS yöntemi için elde edilen regresyon vektörünün elemanları farklı örnekleme zamanlarındaki çıkış sinyaline bağlı olduğundan regresyonun derecesi düşmez ve parametreler istendiği gibi yakınsanabilir.

****

**Figür b.4 – Birim Gecikmeli 0.32 Geri Besleme Kazancı ile ELS Algoritmasına göre Parametre Kestirimi**

Denklem b.i.3’e bakıldığında, ELS ile birim gecikmeli sistemde parametre kestiriminde herhangi bir sürekli hal hatası alınmaması gerektiği gözükmektedir. Lakin, Geri Besleme kazancının kritik sönüme yakın bir değer olmasından kaynaklı olarak kontrol sinyali zayıf kaldığından, Figür b.4’te gözlemlendiği gibi, parametre kestirimi başarılı olamamıştır.

Figür b.5’te, Geri Besleme kazancı 0.32 yerine 0.5 olarak seçilmiştir ve birim gecikmeli Geri Besleme ile alınan kontrol sinyali ile kurulmuş olan ELS algoritması, parametre kestirimini hızlı ve stabil bir şekilde başarmıştır. Herhangi bir kayda değer salınım gözlemlenmemektedir.

****

**Figür b.5 – Birim Gecikmeli 0.5 Geri Besleme Kazancı ile ELS Algoritmasına göre Parametre Kestirimi**

**Referanslar**

* K. J. Astrom (Karl Johan, ), Bjorn Wittenmark, *Adaptive control*, 2ed, 2008.
* Yalçın, Y. (2025) *Uyarlamalı Kontrol Sistemleri [Ders Notları]*, İstanbul Teknik Üniversitesi, Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Yüksek Lisans Programı.